

Matematica per la Fisica

Docente: Silvia Penati

Prova Scritta del 25/2/2009

Problema 1

Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = -4 \frac{x^3}{(x^4 + i)^2}$$

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^3 - 4z}{z^2 (z + 2) (z - 2)^4}$$

- 1) Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
- 2) Si calcoli il residuo per ciascuno dei poli identificati nel punto precedente.
- 3) Si calcoli lo sviluppo in serie di Laurent nella regione $|z - 2| < 2$. Com'è fatta la parte principale?

Problema 3

Sullo spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$ si consideri il funzionale lineare

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n c_n$$

dove $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ e

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-inx} \quad n = 0, 1, \dots$$

- 1) Dimostrare che L è ben definito e limitato.
- 2) Determinare la norma di L .
- 3) Rappresentare L nella forma $L(f) = (g|f)$ per ogni $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

Problema 4

Si calcolino i seguenti integrali

$$\begin{array}{lll} a) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z+2)} & b) \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{z+2} & c) \int_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{1}{z(2z-1)} \\ d) \int_{|z|=1} \frac{e^{3z}}{z^3} & e) \int_{|z|=1} \frac{e^{3z}}{z^2(2z-1)} & \end{array}$$

Problema 5

Data $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ si definisca l'operatore

$$(U_\theta f)(x, y) = f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \quad \theta \in \mathbb{R}, \text{ fissato}$$

- 1) Dimostrare che U_θ è ben definito in $L^2(\mathbb{R}^2)$.
- 2) Costruire U_θ^\dagger , se esiste.
- 3) Dimostrare che U_θ è unitario.

Problema 6

Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e su di esso la base di Hermite $\{e_n\}_{n=0,1,\dots}$ definita da

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Si consideri la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ definita da

$$f(x) = 8x^3 + 4x + 2$$

- 1) Su quali vettori della base di Hermite f ha componenti non nulle?
- 2) Calcolare i coefficienti dello sviluppo di f sulla base di Hermite.